求解方程 $\boldsymbol{R}_a\boldsymbol{R}_x=\boldsymbol{R}_x\boldsymbol{R}_b$ 的四元数几何研究

毛剑飞　　邵黄芳　　蒋　莉　　梁荣华

(浙江工业大学计算机科学与技术学院，杭州　310023)

摘　要　机器人手眼标定通常要解一个旋转方程 $\boldsymbol{R}_a\boldsymbol{R}_x=\boldsymbol{R}_x\boldsymbol{R}_b$，求解该方程有很多方法，其中利用四元数的方法最为简洁实用。但一般的四元数求解侧重应用，缺乏几何意义的对照，也没有全面分析方程各种解的情况。为了提高机器人手眼标定的效率和精度，在深入研究求解该方程的四元数几何方法的基础上，详细而严格地论证了各种情况下方程的解，不仅给出了四元数矩阵分析与几何解释的有趣对照，而且仿真验证了该算法的正确性。仿真实验表明，了解方程各种解的情形以及几何意义将有助于降低求解的条件数和提高标定的效率，此外，该研究对于发展四元数几何分析也有很大的意义。

关键词　手眼标定　四元数几何　旋转方程　条件数

中图法分类号：TP391.41　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1006-8961(2010)06-951-07

Quaternion Geometrical Analysis on Solving Equation $\boldsymbol{R}_a\boldsymbol{R}_x=\boldsymbol{R}_x\boldsymbol{R}_b$

MAO Jianfei, SHAO Huangfang, JIANG Li, LIANG Ronghua

(*Institute of Computer Science and Technology, Zhejiang University of Technology, Hangzhou* 310023)

Abstract　Calibration of robot hand-eye generally needs to solve a rotation equation $\boldsymbol{R}_a\boldsymbol{R}_x=\boldsymbol{R}_x\boldsymbol{R}_b$. Many methods have been proposed, within which quaternion is the most concise one. But common methods using quaternion emphasize particularly on the application, and are short of relevant geometrical insight, and lack of comprehensive analysis of various solutions. In this paper we use quaternion geometry to solve the rotation equation, give proofs of solutions in various conditions in detail, and illuminate interesting insights between the analysis with quaternion matrix and the expression by geometry. Simulations have been tested. Analyzing solutions in various conditions and understanding the relevant geometrical meaning will help to ease the solving conditions and improve the performance of hand-eye calibration. Moreover, the study is important for the development of the quaternion geometrical analysis.

Keywords　hand-eye calibration, quaternion geometry, rotation equation, conditions

0　引　言

机器人手眼标定的关键问题[1]通常需要首先求解一个旋转方程 $\boldsymbol{R}_a\boldsymbol{R}_x=\boldsymbol{R}_x\boldsymbol{R}_b$。其中，$\boldsymbol{R}_a$ 是机械臂不同位置时，抓手坐标系之间的相对旋转矩阵，$\boldsymbol{R}_b$ 是相应的摄像机坐标系之间的相对旋转矩阵，$\boldsymbol{R}_x$ 则是摄像机相对抓手的旋转矩阵；标定时，要让机械臂对着模板做几次相对运动，首先获取一组不同的 $\boldsymbol{R}_a$，$\boldsymbol{R}_b$，由于这些 $\boldsymbol{R}_a$，$\boldsymbol{R}_b$ 都对应着唯一的 $\boldsymbol{R}_x$，因此理论上可以求解。Shui 和 Ahmad 最早把手眼标定作为求解 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{XB}$ 这样的方程来专门研究[2]，解这个方程首先要求解 $\boldsymbol{X}$ 的旋转分量，即求解其蕴涵的旋转方程 $\boldsymbol{R}_a\boldsymbol{R}_x=\boldsymbol{R}_x\boldsymbol{R}_b$，通过繁冗的几何推导，最终导出了 $\boldsymbol{R}_x$ 的线性闭环解法。文献[2]算法基于几何推导，虽具有明显的几何意义，但是推导过程显得过于繁冗和复杂。对此 Chou 和 Kamel 给出了基于四元数方程的简洁求解方法[3]。其后，Zhuang 分别提

基金项目：国家自然科学基金项目(60703002)；浙江省自然科学基金项目(Y1090335)；浙江省科技厅面上社会发展项目(2009C33043)

收稿日期：2009-06-30；**改回日期**：2009-08-08

第一作者简介：毛剑飞(1976—　)，男。副教授。2004 年浙江大学控制理论与控制工程专业博士毕业。主要研究方向为图像处理与机器视觉。E-mail：mjf@zjut.edu.cn

出了基于四元数的两步线性法和一步线性法[4-5]，进一步提高了求解的精度和鲁棒性。Konstantinos 和 Schmidt 采用八元数也得出了线性闭环解法[6-7]。Chen 和 Zhao 则采用基于四元数的旋量理论来线性解决这个问题[8-9]。然而上述方法几乎都是从应用的角度求解，很少考虑四元数与几何的联系，使得这些方法的解缺乏几何意义的对照，而且也没有全面分析该方程的各种解的情况。笔者认为，理解四元数的几何解释、全面了解各种解的几何意义将使人们在实际标定中可避免因某些无用的操作而造成的方程冗余，且在理论上也将指导人们在标定中该采取什么样的操作，以使得线性求解 $\boldsymbol{R}_x$ 或 $\boldsymbol{X}$ 的条件数最小，从而提高了标定的精度。为此，本文将详细阐述求解 $\boldsymbol{R}_a\boldsymbol{R}_x=\boldsymbol{R}_x\boldsymbol{R}_b$ 的四元数几何理论和详细分析方程解的各种条件，并给出严格的论证说明，本文的研究不仅对于标定，而且对于发展四元数几何分析也有很大的意义。

叙述前，首先对本文的符号进行说明及约定。文中与 $\boldsymbol{R}_a,\boldsymbol{R}_b,\boldsymbol{R}_x$ 对应的四元数分别记为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{x}$，记 $\boldsymbol{a}=a_0+a$，$\boldsymbol{b}=b_0+b$，a_0,b_0 为四元数的实部。其中以四元数 $\boldsymbol{a}$ 为例，记 $\boldsymbol{Q}_a$ 为与四元数 $\boldsymbol{a}$ 对应的四元数矩阵，因为任何旋转变换均可以看作是围绕单位轴旋转某个 $0\sim\pi$ 之间的角度而成，记$(\boldsymbol{k}_a,\ \theta_a)$为与四元数 $\boldsymbol{a}$ 对应的单位轴向量及旋转角，并有 $\boldsymbol{R}_a=Rot(\boldsymbol{k}_a,\theta_a)$。若记 $\boldsymbol{S}^+$ 为实部大于等于 0 的单位四元数，则 $\boldsymbol{S}^+$ 与旋转变换群同构。

这里四元数和 4 维向量在不存在歧义的情况下经常混用而不加区分，并也称 4 维向量的第 1 维为实部，其他 3 维为虚部。

1 单方程分析

定理 1[4] $\boldsymbol{R}_c=\boldsymbol{R}_a\boldsymbol{R}_b\Leftrightarrow\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\circ\boldsymbol{b}$，这里 $\circ$ 为 Hamilton 乘。

定理 2 $\boldsymbol{R}_a\boldsymbol{R}_x=\boldsymbol{R}_x\boldsymbol{R}_b\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\circ\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{Q}_a\boldsymbol{Q}_x=\boldsymbol{Q}_x\boldsymbol{Q}_b\Rightarrow\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}=0$，即

$$\begin{bmatrix} a_0-b_0 & -(a_1-b_1) & -(a_2-b_2) & -(a_3-b_3) \\ a_1-b_1 & a_0-b_0 & -(a_3+b_3) & a_2+b_2 \\ a_2-b_2 & a_3+b_3 & a_0-b_0 & -(a_1+b_1) \\ a_3-b_3 & -(a_2+b_2) & a_1+b_1 & a_0-b_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

显然 $\boldsymbol{x}=\ker\boldsymbol{Q}\cap\boldsymbol{S}^+$

以下分析 $\boldsymbol{Q}$ 的性质，以了解方程的可解性。

定理 3 退化情况，即 $\boldsymbol{Q}=0$ 时，以下 4 者等价：

1）$\boldsymbol{Q}=0$；

2）$a_1=b_1=a_2=b_2=a_3=b_3=0$ 且（$a_0=b_0=1$ 或 $\boldsymbol{\theta}_a=\boldsymbol{\theta}_b=0$）；

3）$\boldsymbol{R}_a=\boldsymbol{R}_b=\boldsymbol{I}_3$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}=1$；

4）$\boldsymbol{x}=\ker\boldsymbol{Q}\cap\boldsymbol{S}^+=\boldsymbol{S}^+$，表示解为整个超半球面，即解为任意旋转矩阵；

5）方程本身冗余。

前面 3 个定理很容易证明。

定理 4 非退化情况，即 $\boldsymbol{Q}\neq0$ 时，以下 4 者等价：

1）式(1)存在非 0 解；

2）$\boldsymbol{Q}$ 是偏斜对称的矩阵，且对角线元素为 0；

3）$\boldsymbol{Q}$ 是简单矩阵，即相似于对角阵的矩阵，$\boldsymbol{Q}$ 仅有纯虚数或 0 的特征值；

4）$\mathrm{rank}(\boldsymbol{Q})=2$。

证明 令 $\boldsymbol{Q}=(a_0-b_0)\boldsymbol{I}_4+\boldsymbol{Q}_1$，显然 $\boldsymbol{Q}_1$ 的对角线元素为 0，且 $\boldsymbol{Q}_1+\boldsymbol{Q}_1^*=0$。任何矩阵均酉相似于上三角矩阵，令 $\boldsymbol{Q}_1=\boldsymbol{UXU}^*$，则：$0=\boldsymbol{Q}_1+\boldsymbol{Q}_1^*=\boldsymbol{U}(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}^*)\boldsymbol{U}^*\Rightarrow\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}^*=0$，则 $\boldsymbol{X}$ 只能是对角阵，且其对角线元素只能为 0 或者纯虚数。

$$\boldsymbol{Q}=(a_0-b_0)\boldsymbol{I}_4+\boldsymbol{Q}_1=\boldsymbol{U}[(a_0-b_0)\boldsymbol{I}_4+\boldsymbol{X}]\boldsymbol{U}^*$$

其中，$(a_0-b_0)I_4+X$ 是对角阵，若 $a_0-b_0\neq0$，$(a_0,b_0\in\boldsymbol{R})$，注意到 $\boldsymbol{X}$ 的对角线元素为 0 或为纯虚数，则$(a_0-b_0)\boldsymbol{I}_4+\boldsymbol{X}$ 的对角线元素恒不为 0，故 $\boldsymbol{Q}$ 非奇异，无非 0 解，所以若式(3)要有非 0 解，则 $a_0=b_0$，而 $a_0=b_0\Leftrightarrow\theta_a=\theta_b\Leftrightarrow\boldsymbol{Q}$ 的对角线元素为 0，观察式(1)可见，显然偏斜对称，故本定理中的 1)⇒2)，由于 $a_0=b_0$，$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}_1=\boldsymbol{UXU}^*$，故此时 $\boldsymbol{Q}$ 能对角化，若仅有纯虚数或 0 的特征值，则 2)⇒3)，而若 3)成立，则 $\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{Q}^*=0$，显然 $a_0=b_0$，故 3)⇔2)。若考虑 2)成立时，则 $\boldsymbol{Q}$ 的特征多项式为

$$\begin{aligned}\Delta_{\boldsymbol{Q}}(\lambda)&=\lambda^2[\lambda^2+2(a_1^2+a_2^2+a_3^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2)]=\\&\lambda^2[\lambda^2+4\sin^2(\theta_a/2)]\end{aligned}$$

当 $\theta_a=0$，即相当于满足定理 3 中的第 2)者，显然此种情况为退化情形。

当 $\theta_a\neq0$，由于 $\boldsymbol{Q}$ 为简单矩阵，由以上 $\boldsymbol{Q}$ 的特征多项式可知，$\lambda=0$ 对应两个不同的特征向量 $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2$，故 $\dim(\ker(\boldsymbol{Q}))=2$，则因

$\mathrm{rank}(\boldsymbol{Q})=\dim(\mathbf{R}^4)-\dim(\ker(\boldsymbol{Q}))=2$，故 2)⇒4)，此时，$\ker\boldsymbol{Q}=\{\rho_1\boldsymbol{u}_1+\rho_2\boldsymbol{u}_2:\rho_1,\rho_2\in\boldsymbol{R}^1\}$，$\rho_1\boldsymbol{u}_1+\rho_2\boldsymbol{u}_2$ 本有两个自由度，但考虑到 $\ker\boldsymbol{Q}$ 在 $\boldsymbol{S}^+$

的限制,方程解只有一个自由度,实际上该解为 S^+ 的超半球面上的超圆线,故 4)⇒1),由此证明本定理的 4 者等价。

推论 1　方程有解的充要条件是 $a_0=b_0$ 或 $\theta_a=\theta_b$

综合定理 3,4,显然该推论成立

推论 2　非退化情况且有解时(以下 Im 为取 4 维向量的虚部),有以下 3 种情况:

1) 若 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b}$,则 $\mathrm{Im}(\ker\boldsymbol{Q})=\mathrm{span}\{\boldsymbol{k}_x\}=\{\rho(b-a):\rho\in\boldsymbol{R}^1\}^{\perp}$。这说明,所有所有满足方程解的轴向量 $\boldsymbol{k}_x$ 组成了一个平面空间,此平面的法向量为 $b-a$;且 $\boldsymbol{x}$ 与此平面上的所有单位向量一一对应;

2) 若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$,则 $\boldsymbol{x}$ 是轴向量 $\boldsymbol{k}_x=\boldsymbol{k}_a$,且 θ_x 为任意角度的旋转矩阵;

3) 若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}^*$,则 $\boldsymbol{x}$ 是旋转角 $\theta_x=\pi$,且 $\boldsymbol{k}_x$ 为正交于 a 的任意旋转轴向量。

注意:(以下 Q 的上标为行号,如 $Q^{1,2}$ 表示取矩阵 1,2 行的行向量)。

证明　首先找到 Q 的所有解向量。当 $a_1\neq b_1$,$\boldsymbol{Q}^{1,2}$ 是 $\boldsymbol{Q}$ 的两个线性无关组,若此时 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{Q})=2$,则 $\ker\boldsymbol{Q}^{1,2}=\ker\boldsymbol{Q}$,这样解向量就可以很容易找出,依次找出各种条件下对应的解向量 $[\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2]$ 如下:

$$\begin{array}{cc} a_1\neq b_1 & a_2\neq b_2 \\ \begin{bmatrix} a_2+b_2 & -(a_3+b_3) \\ a_3-b_3 & a_2-b_2 \\ 0 & -(a_1-b_1) \\ -(a_1-b_1) & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_1+b_1 & -(a_3+b_3) \\ 0 & a_2-b_2 \\ -(a_3-b_3) & -(a_1-b_1) \\ a_2-b_2 & 0 \end{bmatrix} \\ a_3\neq b_3 & a=b \\ \begin{bmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 \\ 0 & a_3-b_3 \\ -(a_3-b_3) & 0 \\ a_2-b_2 & -(a_1-b_1) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_1 \\ 0 & a_2 \\ 0 & a_3 \end{bmatrix} \end{array} \tag{2}$$

当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b}$ 时,由于以上 $\mathrm{Im}[\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2]$ 都线性无关,故 $\dim(\mathrm{Im}(\ker\boldsymbol{Q}))=2$,由于 $\dim\{\rho(b-a):\rho\in\mathbf{R}^1\}=1$,且注意到:若此时 $\boldsymbol{Q}^1\perp\mathrm{Im}(\ker\boldsymbol{Q})$,则 $\mathrm{Im}(\ker\boldsymbol{Q})=\{\rho(b-a):\rho\in\mathbf{R}^1\}^{\perp}$,故虚部构成了一个平面,如果将虚部正交化就是 $\boldsymbol{k}_x$,则 $\mathrm{Im}(\ker\boldsymbol{Q})=\mathrm{span}\{\boldsymbol{k}_x\}=\{\rho(b-a):\rho\in\mathbf{R}^1\}^{\perp}$。设 $\boldsymbol{y}=\rho_1\boldsymbol{u}_1+\rho_2\boldsymbol{u}_2$,由于 $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2$ 线性无关,给定 $\boldsymbol{y}$ 只有唯一的 ρ_1,ρ_2 与之对应,而且由于 $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2$ 的虚部,也线性无关,给定 $\boldsymbol{y}$ 的虚部,也只有唯一的 ρ_1,ρ_2 与之对应,故其实部也是唯一的,而 $\{\boldsymbol{x}\}\subseteq\{\boldsymbol{y}\}$,此时本推论中的第 1)种情况成立。由式(2)最后一组解向量可知,显然 $\boldsymbol{x}$ 为轴向量等于 a,旋转角任意的旋转矩阵(这其中也包括单位阵),则推论 2 中的第 2)种情况成立。以上情况,若 $a=0$,则又退化到了定理 3 中第 2)者的退化情况。考虑 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}^*$ 时,由式(2)前 3 组的任意一组解向量都可看出,$\boldsymbol{x}$ 的旋转角 $\theta_x=\pi$,$\boldsymbol{k}_x$ 为正交于 a 的任意旋转轴,故本推论的第 3)种情况成立。

定理 5　非退化情况且有解时,有以下两种情况:

1) $\boldsymbol{R}_a\boldsymbol{R}_x=\boldsymbol{R}_x\boldsymbol{R}_b\Rightarrow a=\boldsymbol{x}\circ b\circ\boldsymbol{x}^*$;

2) 将 b 旋转到 a 的所有 $\boldsymbol{x}$ 构成一个旋转变换群。

证明　根据推论 1,方程有解时,若 $a_0=b_0$,则 $\boldsymbol{R}_a\boldsymbol{R}_x=\boldsymbol{R}_x\boldsymbol{R}_b\Rightarrow\boldsymbol{Q}_a\boldsymbol{Q}_x=\boldsymbol{Q}_x\boldsymbol{Q}_b\Rightarrow(Q_a+a_0\boldsymbol{I}_4)\boldsymbol{Q}_x=\boldsymbol{Q}_x(\boldsymbol{Q}_b+\boldsymbol{b}_0\boldsymbol{I}_4)\Rightarrow\boldsymbol{Q}_a\boldsymbol{Q}_x=\boldsymbol{Q}_x\boldsymbol{Q}_b\Rightarrow\boldsymbol{Q}_a=\boldsymbol{Q}_x\boldsymbol{Q}_b\boldsymbol{Q}_x{}^*\Rightarrow a=\boldsymbol{x}\circ b\circ\boldsymbol{x}^*$。

由于 $a=\boldsymbol{x}\circ b\circ\boldsymbol{x}^*\Leftrightarrow\boldsymbol{k}_a=\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{k}_b\circ\boldsymbol{x}^*$,可知球面上两对关于原点对称的有序点只能对应唯一的旋转变换群,故本定理的第 2) 种情况成立。定理 5 指明:求解 $\boldsymbol{R}_a\boldsymbol{R}_x=\boldsymbol{R}_x\boldsymbol{R}_b$ 相当于找一个将 b 旋转到 a 的旋转变换。结合推论 2 可知,方程解的几何意义如下:

1) $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b}$ 时,$\mathrm{span}\{\boldsymbol{k}_x\}=\{\rho(b-a):\rho\in\boldsymbol{R}^1\}^{\perp}$,$\{\boldsymbol{k}_x\}$ 显然是一个法向量为 $b-a$ 的平面圆,显然空间中只有围绕这样的旋转轴才能确保将 b 旋转到 a,并且解只有一个关于旋转角度的自由度;

2) $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 时,即 $\boldsymbol{R}_a=\boldsymbol{R}_b$ 时,若此时 $\boldsymbol{k}_a=\boldsymbol{k}_b$,则按几何想象,此时 $\boldsymbol{k}_x=\boldsymbol{k}_a=\boldsymbol{k}_b$,旋转角任意,或者 $\theta_x=0$,$\boldsymbol{k}_x$ 任意,但这种情况是 $\boldsymbol{k}_x=\boldsymbol{k}_a=\boldsymbol{k}_b$,旋转角任意的特例;

3) $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}^*$ 时,即 $\boldsymbol{R}_a=\boldsymbol{R}_b^*$ 时,若此时 $\boldsymbol{k}_a=-\boldsymbol{k}_b$,则按几何想象,此时 $\boldsymbol{k}_x$ 为正交于 a 的任意旋转轴,旋转角显然为 π;

4) 方程退化时,即 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}=1$ 时,由于此时四元数 $\boldsymbol{a}$ 的旋转轴任意,根据上述第 2)个几何意义,$\boldsymbol{x}$ 的旋转轴也任意,旋转角也任意,故 $\boldsymbol{x}$ 是任意旋转矩阵,这与定理 3 的第 4)者的结论一致。

2　多方程分析

以上分析表明,因 $\boldsymbol{R}_a\boldsymbol{R}_x=\boldsymbol{R}_x\boldsymbol{R}_b$ 的单方程在 $a_0=b_0$ 下有解,故多方程时有解的前提就是所有方程其对应的矩阵 $\boldsymbol{R}_a$,$\boldsymbol{R}_b$ 的旋转角相同,可在此前提

下考虑以下两个方程的情况：

首先设这两个方程分别是

$$\boldsymbol{R}_a\boldsymbol{R}_x=\boldsymbol{R}_x\boldsymbol{R}_b \qquad \boldsymbol{R}_c\boldsymbol{R}_x=\boldsymbol{R}_x\boldsymbol{R}_d$$

以上两个方程对应的四元数方程分别是

$$\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{x}=0 \qquad \boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{x}=0$$

令 $\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{Q}_1;\boldsymbol{Q}_2]$，即将 $\boldsymbol{Q}_2$ 排于 $\boldsymbol{Q}_1$ 的下方，则有：$\boldsymbol{Qx}=0$，注意此处的 $\boldsymbol{Q}$ 应与单方程的 $\boldsymbol{Q}$ 区分。则 $\boldsymbol{x}=\ker\boldsymbol{Q}\cap\boldsymbol{S}^+=\ker\boldsymbol{Q}_1\cap\ker\boldsymbol{Q}_2\cap\boldsymbol{S}^+$。显然可以立即得出以下结论：

1）方程无解 $\Leftrightarrow \mathrm{rank}(\boldsymbol{Q})=4 \Leftrightarrow \ker\boldsymbol{Q}_1\cap\ker\boldsymbol{Q}_2=0$；

2）方程有无穷解 $\Leftrightarrow \mathrm{rank}(\boldsymbol{Q})=2 \Leftrightarrow \ker\boldsymbol{Q}_1=\ker\boldsymbol{Q}_2$；

3）方程有定解 $\Leftrightarrow \mathrm{rank}(\boldsymbol{Q})=3$。

推论 3 根据定理 5 的第 2）种情况，方程有无穷多解时，以下三者等价：

1）方程 2 冗余；

2）方程解有一个自由度；

3）$\boldsymbol{k}_a=\boldsymbol{k}_c,\boldsymbol{k}_b=\boldsymbol{k}_d$ 或 $\boldsymbol{k}_a=-\boldsymbol{k}_c,\boldsymbol{k}_b=-\boldsymbol{k}_d$。

需要说明的是：即使退化情况，也满足 3），故退化情况也属于方程冗余。

推论 4 方程 $\boldsymbol{R}_a\boldsymbol{R}_x=\boldsymbol{R}_x\boldsymbol{R}_b$ 非退化时，$\{(\boldsymbol{R}_c,\boldsymbol{R}_d)\mid \boldsymbol{R}_c=Rot(\boldsymbol{k}_a,\boldsymbol{\theta}),\boldsymbol{R}_d=Rot(\boldsymbol{k}_b,\boldsymbol{\theta}),\ \forall\boldsymbol{\theta}\in\boldsymbol{R}^1\}$ 中任一对 $(\boldsymbol{R}_c,\boldsymbol{R}_d)$ 所构成的方程都冗余。若是退化情况，则方程本身就冗余。

推论 5 两个方程有定解的必要条件是不存在方程冗余。

以上推论可以依次容易的推出。以下分析都是方程没有冗余时的情况。

定理 6 方程有定解在几何上应满足：$\boldsymbol{k}_x\perp\overrightarrow{k_ak_b}$ 且 $\boldsymbol{k}_x\perp\overrightarrow{k_ck_d}$，且 $\boldsymbol{x}$ 分别关于两个方程的旋转角应相等（记 $\overrightarrow{k_ak_b}$ 表示向量 $\boldsymbol{k}_a,\boldsymbol{k}_b$ 之间的连线），并有以下推论：

1）考虑 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}=\boldsymbol{d}$ 时，方程解为 $\boldsymbol{I}_3$；

2）考虑 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{d}$ 时，方程有解的充要条件是 $\boldsymbol{k}_a\perp\overrightarrow{k_ck_d}$，此时 $\boldsymbol{k}_x=\boldsymbol{k}_a$，$\theta_x$ 是对应将 $\boldsymbol{k}_d$ 旋转到 $\boldsymbol{k}_c$ 的旋转角；

3）若 $\overrightarrow{k_ak_b}/\!/\overrightarrow{k_ck_d}$，则方程必有定解。本定理的推论 2）可视为推论 3）中线段 $\overrightarrow{k_ak_b}$ 无限接近的特殊情形。

证明 首先考虑 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}=\boldsymbol{d}$ 时，这时 $\overrightarrow{k_ak_b}=\overrightarrow{k_ck_d}=0$，由推论 2 的第 2）种情况可以看出，取 $\boldsymbol{x}$ 的旋转角为 0，轴任意时，$\boldsymbol{k}_x$ 与线段 $\overrightarrow{k_ak_b}$ 以及 $\overrightarrow{k_ck_d}$ 都正交，且角度都相等，满足本定理，此时的解为 $\boldsymbol{I}_3$。

考虑 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{d}$ 时，由推论 2 的第 2）种情况可知，方程若要有定解，其要求 $\boldsymbol{k}_x=\boldsymbol{k}_a$，且应该满足 $\boldsymbol{k}_x\perp\overrightarrow{k_ck_d}$，此时根据推论 2 的第 1）种情况有唯一的 θ_x 与之对应（注意此时的 θ_x 可取负数，表示顺时针旋转），故也满足定理。

考虑 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{d}$ 时，根据推论 2 的第 1）种情况，$\{\boldsymbol{k}_x\}=\{\rho(b-a):\rho\in\mathbf{R}^1\}^\perp\cap\{\rho(d-c):\rho\in\mathbf{R}^1\}^\perp=\mathrm{span}\{b-a,\ d-c\}^\perp$，也即 $\boldsymbol{k}_x\perp\overrightarrow{k_ak_b}$ 且 $\boldsymbol{k}_x\perp\overrightarrow{k_ck_d}$，显然此时 $\boldsymbol{k}_x$ 对应于 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 唯一的旋转角，且同时对应于 $\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}$ 唯一的旋转角，这两个角度应该相等，方程才有定解，否则无解。

若 $\overrightarrow{k_ak_b}/\!/\overrightarrow{k_ck_d}$，则两组方程对应式（3）中同一类解向量，也对应式（1）的 $\boldsymbol{Q}$ 中同样行号的两组向量，若取 1，2 行，则 $\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{Q}_1^{1,2};\boldsymbol{Q}_2^{1,2}]$，显然 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{Q})\leqslant 3$，取其余行时都有 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{Q})\leqslant 3$。但由于冗余情况已经排除，故 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{Q})=3$，方程必有定解。注意到正向平行与反向平行均可。

推论 6 设方程形式为：$\boldsymbol{R}_{a(i)}\boldsymbol{R}_x=\boldsymbol{R}_x\boldsymbol{R}_{b(i)}$，$i=1,2,3,\cdots$，方程有解在几何上应满足：$\boldsymbol{k}_x\perp\overrightarrow{k_{a(i)}k_{b(i)}}$，$i=1,2,3,\cdots$，且此时，对于所有的 i，将 $\boldsymbol{k}_{b(i)}$ 旋转到 $\boldsymbol{k}_{a(i)}$ 的旋转角应一律相等（对轴点重合情形也成立）。

以上推论说明：求解 $\boldsymbol{R}_x$ 的轴向量 $\boldsymbol{k}_x$ 相当于求解所有 $\overrightarrow{k_{a(i)}k_{b(i)}}$ 的公垂线，如果不存在公垂线，则肯定无解，即使存在公垂线即公共的旋转轴，还要求该旋转轴对应的第 1 个方程的旋转角也等于后面所有方程的旋转角。

关于单个方程 $\boldsymbol{R}_a\boldsymbol{R}_x=\boldsymbol{R}_x\boldsymbol{R}_b$，本文通过四元数几何分析，给出以下总结：

1）$\boldsymbol{x}$ 有解的充要条件：$a_0=b_0$，显然多个方程要有解，首先要各自满足这个条件；

2）$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}=1$ 时，$\boldsymbol{x}$ 的解为有 3 个自由度，具体为整个旋转变换群 $\boldsymbol{S}^+$；

3）$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\neq 1$ 时，$\boldsymbol{x}$ 的解有一个自由度，具体为 $\boldsymbol{k}_x=\boldsymbol{k}_a$，$\theta_x$ 任意的旋转矩阵（旋转角正负均可）；

4）$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}^*\neq 1$ 时，$\boldsymbol{x}$ 的解有一个自由度，具体为 $\theta_x=\pi$，$\boldsymbol{k}_x$ 为任意正交于 a 的旋转轴；

5）$a_0=b_0$ 且 $a\neq b$ 时，$\boldsymbol{x}$ 的解有一个自由度，具体为 $\{\boldsymbol{k}_x\}=\{\rho(b-a):\rho\in\mathbf{R}^1\}^\perp$，且 $\boldsymbol{x}$ 与 $\{\boldsymbol{k}_x\}$ 平面上的所有单位向量一一对应。

关于多个方程 $\boldsymbol{R}_{a(i)}\boldsymbol{R}_{x(i)}=\boldsymbol{R}_{x(i)}\boldsymbol{R}_{b(i)}$，有解的前提就是各方程应先满足推论 6 的第 1）个总结，这样

可给出以下总结：

1）方程存在冗余的判别：$\boldsymbol{k}_{a(i)}=\boldsymbol{k}_{a(j)}$，$\boldsymbol{k}_{b(i)}=\boldsymbol{k}_{b(j)}$ 或 $\boldsymbol{k}_{a(i)}=-\boldsymbol{k}_{a(j)}$，$\boldsymbol{k}_{b(i)}=-\boldsymbol{k}_{b(j)}$，冗余会造成条件数增加并将放大原有的误差，因此标定设计要尽量避免冗余；

2）方程的解在几何上表现为解的轴向量 $\boldsymbol{k}_x$ 与所有 $\overrightarrow{k_{a(i)}k_{b(i)}}$ 正交，且所有关于这些对应轴向量的旋转角都应该相等；

3）方程无冗余时，若 $\overrightarrow{k_ak_b}\,/\!/\,\overrightarrow{k_ck_d}$，则方程必有定解。

求解 $\boldsymbol{x}$ 的具体算法如下：

线性求解多个式(1)这样的方程，如采用 SVD 分解的方法，再正交化。

需要说明的是：一般的做法是直接求解所有 $\overrightarrow{k_{a(i)}k_{b(i)}}$ 的公垂线，其不足之处是没有考虑 $\theta_{a(i)}$ 与 $\theta_{b(i)}$ 存在的误差，这样将导致误差可能增大。而本文算法则没有这个问题。

非冗余情况下，关于 $\overrightarrow{k_ak_b}\,/\!/\,\overrightarrow{k_ck_d}$ 有以下推论（注意以下所述的切平面都是关于单位球上该点的切平面）：

1）若 $\boldsymbol{k}_a$，$\boldsymbol{k}_b$ 重合时，且 $\boldsymbol{k}_a$ 处的切平面 $/\!/\,\overrightarrow{k_ck_d}$，则可认为 $\overrightarrow{k_ak_b}\,/\!/\,\overrightarrow{k_ck_d}$，方程必有唯一解；

2）若 $\boldsymbol{k}_a$，$\boldsymbol{k}_b$ 重合，且 $\boldsymbol{k}_c$，$\boldsymbol{k}_d$ 重合，则 $\boldsymbol{k}_a$ 处的切平面与 $\boldsymbol{k}_c$ 处的切平面必相交于线 l，且按照定理 6，由于 $\boldsymbol{k}_x$ 应该垂直于线 l 上的某点与 $\boldsymbol{k}_c$，$\boldsymbol{k}_d$ 的连线，故 $\boldsymbol{k}_x$ 也垂直于 $\overrightarrow{k_ck_d}$，且旋转角为 0，与这样的解对应的只有 $\boldsymbol{I}_3$；

3）若 $\boldsymbol{k}_a$，$\boldsymbol{k}_d$ 重合，且 $\boldsymbol{k}_b$，$\boldsymbol{k}_c$ 重合，即两线反向重合，且线的两端点不关于原点对称，则可认为 $\overrightarrow{k_ak_b}\,/\!/\,\overrightarrow{k_ck_d}$，为本推论 1）的特例，方程必有唯一解，此唯一解就是 $\theta_x=\pi$，$\boldsymbol{k}_x=(a+b)/\|a+b\|$。

以下仿真将具体测试这些有趣的结论。

3　仿真实验

以下均不考虑方程冗余，误差估计：误差 $e=\max\limits_i\|a(i)\circ\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}\circ b(i)\|_1$，以下测试为若干组测试之一，实验结果（见表 1—表 5）检验了本文推论的正确性。

表 1　$\overrightarrow{k_ak_b}$ 反向平行于 $\overrightarrow{k_ck_d}$

Tab. 1　$\overrightarrow{k_ak_b}$ parallel $\overrightarrow{k_ck_d}$ inversely

a	*b*	*c*	*d*	*x*	*a*	*b*	*c*	*d*	*x*
0	0	0	0	0.4258 884 62	0.707 106 781	0.707 106 781	0.866 025 404	0.866 025 404	0.482 322 641
−0.026 781 59	0.746 781 592	0.007 054 002	−0.567 054	0.012 572 342	−0.180 033 67	0.462 876 382	−0.061 739 5	−0.404 927 17	0.259 571 501
0.3	0.3	0.7	0.7	−0.904 666 48	−0.109 322 99	0.533 587 06	0.488 260 502	0.145 072 831	−0.706 976 72
0.953 563 184	−0.593 563 18	−0.714 108	0.434 108 004	0.006 286 171	0.675 008 416	0.032 098 365	−0.088 260 5	0.254 927 169	−0.447 405 22
$e=7.494\,005\,416\,219\,807$e-016　唯一解					$e=7.216\,449\,660\,063\,518$e-016　唯一解				

表 2　$\overrightarrow{k_ak_b}$ 正向平行于 $\overrightarrow{k_ck_d}$

Tab. 2　$\overrightarrow{k_ak_b}$ parallel $\overrightarrow{k_ck_d}$

a	*b*	*c*	*d*	*x*	*a*	*b*	*c*	*d*	*x*
0	0	0	0	0	0.258 819 045	0.258 819 045	0.809 016 994	0.809 016 994	0
0.315 472 902	−0.115 472 9	0.115 472 902	−0.315 472 9	0.169 030 851	−0.877 474 86	0.638 535 311	−0.388 561 55	0.533 961 062	0.489 105 924
0.946 418 706	−0.346 418 71	0.346 418 706	−0.946 418 71	0.507 092 553	0.099 849 228	−0.506 554 84	0.308 248 787	−0.060 760 26	0.832 520 721
0.069 054 196	0.930 945 804	−0.930 945 8	−0.069 054 2	0.845 154 255	−0.391 255 3	0.518 350 802	−0.315 426 87	0.238 086 702	−0.260 162 73
$e=2.844\,946\,500\,601\,964$e-016　唯一解					$e=3.608\,224\,830\,031\,759$e-016　唯一解				

表 3　$\boldsymbol{k}_a$，$\boldsymbol{k}_b$ 重合，$\boldsymbol{k}_c$，$\boldsymbol{k}_d$ 重合

Tab. 3　$\boldsymbol{k}_a$，$\boldsymbol{k}_b$ are superposable and also $\boldsymbol{k}_c$，$\boldsymbol{k}_d$

a	*b*	*c*	*d*	*x*	*a*	*b*	*c*	*d*	*x*
0	0	0	0	1	0.239 315 664	0.239 315 664	0.885 456 026	0.885 456 026	1
−0.082 089 69	−0.082 089 69	−0.293 355 26	−0.293 355 26	0	0.145 641 273	0.145 641 273	−0.046 472 32	−0.046 472 32	0
−0.069 775 79	−0.069 775 79	0.933 388 156	0.933 388 156	0	−0.591 391 16	−0.591 391 16	0.185 288 548	0.185 288 548	0
0.994 179 372	0.994 179 372	0.206 710 525	0.206 710 525	0	0.756 156 816	0.756 156 816	−0.423 646 2	−0.423 646 2	0
$e=0$　（唯一解）					$e=0$　（唯一解）				

表 4 k_a, k_b 重合，k_c, k_d 未重合

Tab. 4 k_a, k_b are superposable, but k_c, k_d not

a	b	c	d	x	a	b	c	d	x
0	0	0	0	0.237 315 673	0	0	0	0	0.241 863 356
0.15	0.15	-0.753 402 07	0.301 478 075	-0.145 714 89	-0.496 751 27	-0.496 751 27	-0.646 035 32	0.510 245 849	0.305 648 238
-0.475 234 2	-0.475 234 2	0.615 773 199	-0.288 409 78	0.461 657 984	0.296 751 268	0.296 751 268	0.686 035 323	-0.470 245 85	0.052 629 204
0.866 978 927	0.866 978 927	-0.230 670 1	-0.908 807 33	-0.842 211 58	0.815 583 756	0.815 583 756	-0.334 654 89	-0.720 081 95	-0.919 408 2
e = 9.436 895 709 313 831e-016（此时 oa 垂直于 cd，故有唯一解）					e = 1.280 079 299 851 85（此时 oa 不垂直于 cd，故无解）				

表 5 k_a, k_c 重合，但 k_b, k_d 未重合

Tab. 5 k_a, k_c are superposable, but k_b, k_d not

a	b	c	d	x	a	b	c	d	x
0	0	0	0	0	0.654 860 734	0.654 860 734	0.900 968 868	0.900 968 868	0
0.367 461 715	0.142 062 095	0.367 461 715	-0.890 265 83	0.079 632 81	0.617 341 652	-0.258 157 45	0.354 422 303	-0.192 145 66	-0.314 557 53
0.919 846 859	0.018 248 379	0.919 846 859	-0.061 063 33	-0.763 544 81	-0.393 583 03	-0.612 457 8	-0.225 960 14	0.049 587 426	0.898 972 752
-0.137 308 57	0.989 689 526	-0.137 308 57	0.451 329 166	-0.640 825 98	-0.187 454 27	0.359 732 667	-0.107 619 46	0.385 844 828	-0.304 797 56
e = 1.222 977 297 864 75（此时无解）					e = 0.594 048 437 390 42（此时无解）				

4 结 论

机器人手眼标定通常要求解旋转方程 $\boldsymbol{R}_a\boldsymbol{R}_x = \boldsymbol{R}_x\boldsymbol{R}_b$。求解这个方程可以采用直接线性求解，如先求解方程 $(\boldsymbol{R}_a \otimes \boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{I}_3 \otimes \boldsymbol{R}_b^*)\mathrm{vec}(\boldsymbol{R}_x) = 0$，然后再正交化，但这种方法没有充分利用 $\boldsymbol{R}_a, \boldsymbol{R}_b$ 也是旋转矩阵的特点，故方法不够简练；也可以采用几何方法求解，如 Shui 和 Ahmad 的方法[2]，文献[2]提出的方法虽有明显的几何意义，但推导太繁杂；另外还可以采用四元数方法求解，这种方法充分利用到了旋转方程都是旋转矩阵的特点，若将以上的方程映射到了四元数空间，则求解 $\boldsymbol{R}_x$ 就完全变成了一个解线性一元方程的问题，相对而言，采用四元数方法更为简洁，但以往的方法没有几何对照的解释，仅侧重应用，也没有深入研究各种解的情况。本文基于四元数理论，特别是四元数矩阵理论，给出了方程解简洁的线性表达（式(1)），通过对式(1)的深入分析，本文分别在单方程、多方程的情形下得出了一系列的方程解的结论，并给出了相应的几何解释。总体上，本文主要做了以下工作：

1）关于单方程，本文论证了方程有解的充要条件，并探讨了一个自由度解的几种特殊情形，同时给出了单方程冗余的条件；

2）关于多方程，本文论证了方程冗余的充要条件，并给出了方程有定解的充要条件，也探讨了 $\overrightarrow{k_a k_b} /\!/ \overrightarrow{k_c k_d}$ 的各种特殊情形；

3）本文通过大量的定理、推论得出了很多结论，特别讨论了一些很特殊的情形，这些都是很有趣的，且仿真测试一一验证了这些结论。

本文研究了旋转方程的四元数矩阵的求解方法并给出了几何意义的说明，深入分析和了解各种解的情形以及几何意义将有助于提高机器人手眼标定的效率和降低求解的条件数，此外，本研究对于发展四元数几何分析也有很大的意义。

参考文献(References)

[1] Tsai R, Lenz R. A new technique for fully autonomous and efficient 3D robotics hand/eye calibration[J]. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 1989, 5(3): 345-358.

[2] Shiu Y C, Ahmad S. Calibration of wrist-mounted robotics sensors by solving homogeneous transform equations of the form ***AX*** = ***XB***[J]. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 1989, 5(1): 16-27.

[3] Chou J, Kamel M. Finding the position and orientation of a sensor on a robot manipulator using quaternions[J]. The International Journal of Robotics Research, 1991, 10(3): 240-254.

[4] Zhuang Hanqi, Roth Zvi S. Comments on "Calibration of wrist-mounted robotic sensors by solving homogeneous transform equations of the form ***AX*** = ***XB***"[J]. IEEE Transactions on Robotics and Automations, 1991, 7(6): 877-878.

[5] Zhuang Hanqi, Roth Zvi S. Simultaneous calibration of a robot and a hand-mounted camera[J]. IEEE Transactions on Robotics

and Automations, 1995, 11(5): 649-660.

[6] Daniilidis Konstantinos. Hand-eye calibration using dual quaternions[J]. The International Journal of Robotics Research, 1999, 18(3): 286-298.

[7] Schmidt Jochen, Vogt Florian, Niemann Heinrich. Robust hand-eye calibration of an endoscopic surgery robot using dual quaternions[C]// Proceedings of the 25th DAGM Symposium on Pattern Recognition, Lecture Notes in Computer Science, Berlin, Heidelberg, Germany: Springer-Verlag, 2003, 2781: 548-556.

[8] Chen H H. A screw-motion approach to uniqueness analysis of head-eye geometry[C]//Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, Maui, Hawaii, USA: IEEE Computer Society Press, 1991, 145-151.

[9] Zhao Zijian, Liu Yancai. Hand-eye calibration based on screw motions[C]//Proceedings of 18th International Conference on Pattern Recognition, Hong Kong, China: IEEE Computer Society Press, 2006, 3: 1022-1026.